Diagonalisation des matrices symétriques

par Richard Gomez

Décembre 2007

Richardetdave@aol.com

Résumé

Cet article montre une application importante du produit scalaire : la diagonalisation des matrices symétriques réelles, hermitiennes et normales.

1 Introduction

On suppose que le lecteur connaît les notions de produit scalaire, produit hermitien, espace euclidien, espace hermitien, endomorphisme orthogonal et endomorphisme unitaire. On suppose aussi qu'il connaît les résultats importants sur la diagonalisation des endomorphismes. On consultera [2] pour se rafraîchir la mémoire.

Munir un espace vectoriel réel ou complexe d'un produit scalaire équivaut à choisir une base. En effet, si on choisit la base $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$, par exemple, on pose

$$\langle u, v\rangle = \sum_{i=1}^{n} \bar{u_i}\, v_i$$

C'est si simple que l'on aurait tort de s'en priver. Les applications sont alors nombreuses :

- On peut introduire la norme associée au produit scalaire et faire de la topologie.
- On peut définir la notion d'angle non orienté $\theta \in [0, 2\pi]$ formé par deux vecteurs. On peut définir la notion d'orthogonalité.
- On peut définir la notion d'espace affine euclidien. C'est le cadre idéal de la géométrie classique. La classification des isométries d'un espace affine euclidien se fait facilement dans ce cadre.
- On peut donner une interprétation aux matrices symétriques, ce qui permet de les diagonaliser (et de montrer qu'elles admettent une base propre orthonormée).

2 Endomorphismes auto-adjoints dans le cas réel

Si $A = (a_{ij})$ est une matrice $n \times n$, on définit la transposée de A en posant

$$(A^t)_{ij} = a_{ji}$$

On peut voir les matrices symétriques comme les matrices invariantes par transposition : on dit que A est symétrique si $A^t = A$.

La diagonalisation des matrices symétriques repose sur l'interprétation de la transposition en termes d'endomorphismes. La question est : que peut-on dire d'un endomorphisme dont la matrice est symétrique ? Ou encore : si f est un endomorphisme de matrice M, que peut-on dire de l'endomorphisme défini par M^t ?

C'est ici qu'intervient le produit scalaire. Soient E un espace euclidien, $e = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée, $f \in \mathrm{End}(E)$ et $x, y \in E$. On pose $X = \mathrm{mat}_e\, x$, $Y = \mathrm{mat}_e\, y$ et $F = \mathrm{mat}_e\, f$. On a

$$\begin{aligned} \langle f(x), y\rangle &= (FX)^t Y \\ &= X^t F^t Y \\ &= \langle x, f^*(y)\rangle \end{aligned}$$

où f^* est l'endomorphisme de E défini par

$$\underset{e}{\mathrm{mat}}\, f^* = F^t$$

Ainsi, transposer F revient à définir l'endomorphisme qui permet de « commuter f » dans $\langle f(x), y\rangle$. Commuter signifie ici que pour tous $x, y \in E$ on a

$$\langle f(x), y\rangle = \langle x, f^*(y)\rangle$$

On notera que

1. il n'y a qu'un seul endomorphisme f^* permettant de commuter f dans $\langle f(x), y\rangle$,
2. la matrice de f^* dans une base orthonormée s'obtient en transposant celle de f.

Définition 1. *Soient E un espace euclidien et $f \in \mathrm{End}(E)$.*

1. *L'adjoint de f est l'endomorphisme f^* de E tel que*

$$\langle f(x), y\rangle = \langle x, f^*(y)\rangle$$

pour tout $x, y \in E$.

2. *On dit que f est auto-adjoint si $f^* = f$.*

Nous avons établi la

Proposition 2. *La matrice de l'ajoint d'un endomorphisme f dans une base orthonormée s'obtient en transposant la matrice de f. La matrice d'un endomorphisme auto-adjoint dans une base orthonormée est symétrique.*

Les propriétés de la transposition des matrices se traduisent en termes d'endomorphismes :

Proposition 3. *Soient E un espace euclidien, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f, g \in \mathrm{End}(E)$.*

1. $f^{**} = f$
2. $\mathrm{Id}^* = \mathrm{Id}$
3. $(f + g)^* = f^* + g^*$
4. $(\lambda f)^* = \lambda f^*$
5. $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$
6. $\mathrm{rang}\, f^* = \mathrm{rang}\, f$
7. $\det f^* = \det f$

On notera que l'application linéaire

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & A^t \end{array}$$

se traduit par l'application linéaire

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{End}(E) & \longrightarrow & \mathrm{End}(E) \\ f & \longmapsto & f^* \end{array}$$

On peut utiliser cette application pour caractériser les endomorphismes orthogonaux :

Proposition 4. *Soient E un espace euclidien et $f \in \mathrm{End}(E)$. Alors f est orthogonal si et seulement si $f^{-1} = f^*$.*

3 Endomorphismes auto-adjoints dans le cas complexe

On peut définir la notion d'adjoint dans les espaces hermitiens. La notion d'endomorphisme auto-adjoint correspond alors à la notion de matrice hermitienne (et non pas matrice symétrique).

Définition 5. *Soit* $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.

1. *La matrice adjointe de la matrice* A *est la matrice*

$$A^* = \bar{A}^{\,t}$$

2. *On dit que* A *est une auto-adjointe (ou hermitienne) si* $A^* = A$*, c'est à dire si*

$$\bar{A}^{\,t} = A$$

Soient E un espace hermitien, $e = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E, $f \in \mathrm{End}(E)$ et $x, y \in E$. On note $X = \mathrm{mat}_e\, x$, $Y = \mathrm{mat}_e\, y$ et $F = \mathrm{mat}_e\, f$. On a alors

$$\begin{array}{rcl} \langle f(x), y\rangle & = & \overline{FX}^{\,t}\, Y \\ & = & \bar{X}^t\, \bar{F}^t\, Y \\ & = & \langle x, f^*(y)\rangle \end{array}$$

où l'on définit f^* par

$$\underset{e}{\mathrm{mat}}\, f^* = \bar{F}^t$$

Ceci montre que qu'il existe un et un seul endomorphismes permettant de commuter f dans $\langle f(x), y\rangle$. On le trouve en transposant-conjugant la matrice de f dans une base orthonormée.

Définition 6. *Soient* E *un espace hermitien et* $f \in \mathrm{End}(E)$.

1. *L'adjoint de* f *est l'endomorphismes* f^* *de* E *tel que*

$$\langle f(x), y\rangle = \langle x, f^*(y)\rangle$$

pour tous $x, y \in E$.

2. *On dit que* f *est auto-adjoint si* $f^* = f$.

Proposition 7. *La matrice de l'ajoint d'un endomorphisme* f *dans une base orthonormée s'obtient en transposant-conjugant la matrice de* f*. La matrice d'un endomorphisme auto-adjoint dans une base orthonormée est hermitienne.*

On a clairement la

Proposition 8. *Soient* E *un espace hermitien,* $z \in \mathbb{C}$ *et* $f, g \in \mathrm{End}(E)$.

1. $f^{**} = f$
2. $\mathrm{Id}^* = \mathrm{Id}$
3. $(f + g)^* = f^* + g^*$
4. $(z f)^* = \bar{z}\, f^*$
5. $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$
6. $\mathrm{rang}\, f^* = \mathrm{rang}\, f$
7. $\det f^* = \overline{\det f}$

On notera que l'application semi-linéaire

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}) \\ A & \longmapsto & A^t \end{array}$$

se traduit par l'application semi-linéaire

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{End}(E) & \longrightarrow & \mathrm{End}(E) \\ f & \longmapsto & f^* \end{array}$$

On peut utiliser l'adjoint pour caractériser les endomorphismes unitaires :

Proposition 9. *Soient E un espace hermitien et $f \in \mathrm{End}(E)$. Alors f est unitaire si et seulement si $f^{-1} = f^*$.*

4 Diagonalisation des matrices symétriques réelles

4.1 Rappels sur les espaces réel-complexes

Pour traiter le « cas réel » nous passerons par les nombres complexes. Si E est un espace euclidien, on note $E_{\mathbb{C}}$ le complexifié de E. On décrit la complexification des espaces réels dans [1]. Considérer $E_{\mathbb{C}}$ revient à considérer les combinaisons linéaires

$$\sum_{i=1}^{n} z_i\, e_i$$

avec $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$. Si $e = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, c'est aussi une $\mathbb{C}$-base de $E_{\mathbb{C}}$ appelée « base réelle ». Le compléxifié $E_{\mathbb{C}}$ est un espace vectoriel complexe, c'est même un espace vectoriel « réel-complexe », car on y distingue des éléments réels. Conjuguer un élément de $E_{\mathbb{C}}$ signifie conjuguer ses coordonnées dans e. On munit $E_{\mathbb{C}}$ du produit scalaire

$$\langle u, v\rangle = \sum_{i=1}^{n} \bar{u_i}\, v_i$$

où (u_i) et (v_i) sont les coordonnées de u et v dans e. La complexification d'un espace euclidien donne donc un espace hermitien de même dimension. Si $f \in \mathrm{End}(E)$, on définit le complexifié $f_{\mathbb{C}}$ de f comme l'endomorphisme de $E_{\mathbb{C}}$ qui possède la même matrice que f dans e. On trouve dans [1] une définition intrinsèque de $f_{\mathbb{C}}$. L'endomorphisme $f_{\mathbb{C}}$ est réel dans le sens où il transforme un élément de E en un élément de E (on dit qu'il transforme un vecteur réel en un vecteur réel). Si $g \in \mathrm{End}(E_{\mathbb{C}})$, on définit le conjugué de g par

$$\bar{g}\,(u) = \overline{g(\bar{u}\,)}$$

C'est un endomorphisme de $E_{\mathbb{C}}$. On notera que g est réel si et seulement si $\bar{g} = g$. On montre facilement la

Proposition 10. *Soient E un espace vectoriel réel-complexe et $f \in \mathrm{End}(E)$. Si $f(u) = zu$ alors $\bar{f}\,(\bar{u}\,) = \bar{z}\,\bar{u}$. Autrement dit, si z est une valeur propre de f associée à u, alors $\bar{z}$ est une valeur propre de $\bar{f}$ associée à $\bar{u}$.*

En particulier si f est réel, z est une valeur propre associée à u si et seulement si $\bar{z}$ est une valeur propre associée à $\bar{u}$.

Proposition 11. *Soient E un espace euclidien et f un endomorphisme auto-adjoint de E. On note $E_{\mathbb{C}}$ le compléxifié de E et $f_{\mathbb{C}}$ le compléxifié de f. Alors $f_{\mathbb{C}}$ est auto-adjoint.*

Démonstration. Soit e une base orthonormée de E. Par construction, e est une base orthonormée de $E_{\mathbb{C}}$. Notons A la matrice de f dans e. Par construction, A est la matrice de $f_{\mathbb{C}}$ dans e. Puisque A est réelle, on a

$$A^* = A^t = A$$

autrement dit : A est hermitienne, d'où le résultat. □

4.2 Diagonalisation

On dit abusivement que les endomorphismes auto-adjoints n'ont pas de valeurs propres purement complexes :

Lemme 12. *Soient E un espace euclidien et f un endomorphisme auto-adjoint de E. Alors P_f, le polynome caractéristique de f, est scindé sur $\mathbb{R}$.*

Démonstration. On note $E_{\mathbb{C}}$ et $f_{\mathbb{C}}$ les complexifiés de E et f. Dans une base réelle les endomorphismes f et $f_{\mathbb{C}}$ ont la même matrice. Par conséquent ils ont le même polynome caractéristique P. Soit z une racine de P. Le nombre z est alors une valeur propre de $f_{\mathbb{C}}$. Notons u le vecteur propre associé. D'un côté nous avons

$$\begin{aligned}\langle f_{\mathbb{C}}(u), u\rangle &= \langle zu, u\rangle \\ &= \bar{z}\ \langle u, u\rangle \\ &= \bar{z}\ \|u\|^2\end{aligned}$$

et d'un autre côté

$$\begin{aligned}\langle u, f_{\mathbb{C}}(u)\rangle &= \langle u, zu\rangle \\ &= z\ \langle u, u\rangle \\ &= z\ \|u\|^2\end{aligned}$$

mais $f_{\mathbb{C}}$ étant auto-adjoint, nous avons

$$\langle f_{\mathbb{C}}(u), u\rangle = \langle u, f_{\mathbb{C}}(u)\rangle$$

Puisque u est non nul, on en déduit

$$\bar{z} = z$$

d'où le résultat. □

Théorème 13. *Soient E un espace euclidien et f un endomorphisme auto-adjoint de E. Alors*

1. *f est diagonalisable,*
2. *les sous-espaces propres de f sont deux à deux orthogonaux (f possède une base propre orthonormée).*

Démonstration. La démonstration ressemble un peu à celle de la trigonalisation des endomorphismes sur un corps algébriquement clos. Nous procédons par récurrence sur n, la dimension de l'espace considére. Pour $n = 1$ il n'y a rien à démontrer. Supposons la propriété vraie à l'ordre $n - 1$. Soient E un espace euclidien de dimension n et f un endomorphisme auto-adoint de E. D'après le lemme précédent P_f est scindé sur $\mathbb{R}$. Soient donc λ une valeur propre de f et u un vecteur propre associé. On pose

$$F = \mathrm{Vect}\langle u\rangle^{\perp}$$

C'est un sous-espace de E de dimension $n - 1$.

1. On commence par montrer que F est stable par f. Soit $y \in F$. Alors

$$\begin{aligned}\langle f(y), u\rangle &= \langle y, f(u)\rangle \\ &= \langle y, \lambda u\rangle \\ &= \lambda\ \langle y, u\rangle \\ &= 0\end{aligned}$$

   On a bien

$$f(F) \subset F$$

2. l'espace F hérite naturellement de la structure euclidienne de E et il est clair que $f_{|F}$ est un endomorphisme auto-adjoint de F.
3. D'après l'hypothèse de récurrence, $f_{|F}$ possède une base propre orthonormée (e_1, ..., e_{n-1}). Il est clair que $(e_1, \ldots, e_{n-1}, u/\|u\|)$ est une base propre orthonormée de f. □

Corollaire 14.

1. *Toute matrice réelle symétrique est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. De plus, ses sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux dans $\mathbb{R}^n$.*
2. *Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. Alors il existe $P \in O(n, \mathbb{R})$ tel que ${}^tPAP$ est diagonale.*

5 Diagonalisation des matrices hermitiennes

Les valeurs propres d'un endomorphisme auto-adjoint sont réelles :

Proposition 15. *Soient E un espace hermitien et f un endomorphisme auto-adjoint de E. Alors toutes les racines de P_f, le polynome caractéristique de f, sont réelles.*

Démonstration. Il suffit de reprendre mot pour mot la démonstration du lemme 12 : Soient z une valeur propre de f associée au vecteur propre u. De

$$\langle f(u), u\rangle = \langle u, f(u)\rangle$$

on déduit

$$\bar{z}\ \|u\|^2 = z\ \|u\|^2$$

d'où le résultat. □

Ce résultat est vrai même si la dimension de E est infinie. C'est un résultat fondamental en mécanique quantique.

Théorème 16. *Soient E un espace hermitien et f un endomorphisme auto-adjoint de E. Alors*

1. *f est diagonalisable,*
2. *les sous-espaces propres de f sont deux à deux orthogonaux (f possède une base propre orthonormée),*
3. *toutes les valeurs propres sont réelles.*

Démonstration. Il suffit de reprendre mot pour mot la démonstration du théorème dans le cas réel. Soit λ une valeur propre de f associée au vecteur propre u. On définit F comme l'orthogonal de u. Ce sous-espace est stable par f. On fait une récurrence, c'est à dire que l'on suppose que $f_{|F}$ possède une base propre orthonormée. On conclue en adjoignant $u/\|u\|$ à cette base. □

Il en découle le

Corollaire 17.

1. *Toute matrice complexe hermitienne est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ (la matrice diagonale obtenue est réelle). De plus, ses sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux dans $\mathbb{C}^n$.*
2. *Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice hermitienne. Alors il existe $P \in U(n, \mathbb{C})$ tel que ${}^t\bar{P}AP$ est diagonale réelle.*

Remarque 18. Les matrices symétriques réelles et les matrices hermitiennes sont diagonalisables. En revanche, les matrices complexes symétriques ne sont pas toutes diagonalisables, voir cidessous.

Exercice 1.

a) Montrer que $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2i \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable.

b) Plus généralement, montrer que si $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2 \backslash \{(0,0)\}$ est tel que $\beta^2 + 4\alpha^2 = 0$, alors $\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable.

6 Diagonalisation des endomorphismes normaux

La diagonalisabilité des matrices symétriques réelles et hermitiennes sont des cas particuliers d'un résultat plus général sur les matrices *normales*.

Définition 19. *Endomorphismes normaux, matrices normales.*

1. *Soit E un espace hermitien et $f \in \mathrm{End}(E)$. On dit que f est normal s'il commute avec son adjoint, autrement dit si $f \circ f^* = f^* \circ f$.*
2. *Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. On dit que A est normale si c'est la matrice d'un endomorphisme normal de $\mathbb{C}^n$ dans une base orthonormée, autrement dit si $A A^* = A^* A$.*

On dit d'une matrice A qu'elle est anti-symétrique si $A^t = -A$. On dit qu'elle est anti-hermitienne si $A^* = -A$, c'est à dire si $i A$ est hermitienne.

Proposition 20.

1. *Les matrices symétriques réelles, anti-symétriques réelles, hermitiennes, antihermitiennes, orthogonales et unitaires sont normales.*
2. *Il existe des matrices normales qui ne sont pas dans la liste de l'item 1.*
3. *Les matrices (anti)-symétriques ne sont pas forcément normales.*

Démonstration.

1. L'item 1 est une simple vérification.
2. Soit
$$B = \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$$
Cette matrice n'appartient pas à la liste de l'item 1 et elle n'est pas normale.
3. Commençons par les matrices anti-symétriques. On pose
$$S = \begin{pmatrix} a & z \\ -z & b \end{pmatrix}$$
Il s'agit d'une matrice 2×2 anti-symétrique quelconque. On pose
$$Z = z\bar{b} - a\,\bar{z}$$
Un calcul rapide montre que A est normale si et seulement si
$$Z = -\bar{Z}$$
En prenant par exemple $a = i$, $b = 2i$ et $z = 3i$, on obtient $Z = 3$; ce qui montre que
$$\begin{pmatrix} i & 3i \\ -3i & 2i \end{pmatrix}$$
est une matrice symétrique non normale.
Passons aux matrices symétriques. Soit
$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2i \end{pmatrix}$$
Cette matrice est symétrique non normale. □

Théorème 21. *Soient E un espace hermitien et f un endomorphisme normal de E. Alors*

1. *f est diagonalisable,*
2. *les sous-espaces propres de f sont deux à deux orthogonaux (f possède une base propre orthonormée).*

Il faut prendre garde au fait que ce théorème ne dit rien sur les endomorphimes d'un espace euclidien : dans le cas réel, la normalité n'implique pas la diagonalisabilité. Nous savons par exemple que les matrices orthogonales ne sont pas diagonalisables en général (on peut le vérifier sur une rotation vectorielle non triviale du plan).

Démonstration. On procède par récurrence sur n, la dimension de E. Pour $n=1$ il n'y a rien à démontrer. On suppose la propriété vraie à l'ordre $n-1$. Soient E un espace hermitien de dimension n et f un endomorphisme normal de E. Soit λ une valeur propre de f (ce dernier admet des valeurs propres puisque $\mathbb{C}$ est algébriquement clos). On réduit le problème grâce à la décomposition

$$E=E_\lambda\oplus E_\lambda^\perp$$

On a $\dim E_\lambda\geqslant 1$, donc $\dim E_\lambda^\perp\leqslant n-1$. Il s'agit de montrer la stabilité de $E_\lambda^\perp$ par f et la normalité de la restriction $f_{|E_\lambda^\perp}$.

1. On montre que $f^*(E_\lambda)\subset E_\lambda$. Soit $x\in E_\lambda$. On a

$$\begin{aligned} f(f^*(x)) &= f^*(f(x)) \\ &= f^*(\lambda x) \\ &= \lambda f^*(x) \end{aligned}$$

   ce qui montre que $f^*(x)$ est un vecteur propre de f pour la valeur propre λ, d'où le résultat.

2. On montre que $f(E_\lambda^\perp)\subset E_\lambda^\perp$. Soient $x\in E_\lambda^\perp$ et $y\in E_\lambda$. On a

$$\begin{aligned} \langle f(x),y\rangle &= \langle x,f^*(y)\rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

   car $f^*(y)\in E_\lambda$ (item précèdent) et $x\perp E_\lambda$.

3. On montre que $f^*(E_\lambda^\perp)\subset E_\lambda^\perp$. Soient $x\in E_\lambda^\perp$ et $y\in E_\lambda$. On a

$$\begin{aligned} \langle f^*(x),y\rangle &= \langle x,f^{**}(y)\rangle \\ &= \langle x,f(y)\rangle \\ &= \langle x,\lambda y\rangle \\ &= \lambda\,\langle x,y\rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

   d'où le résultat.

4. D'après le point précèdent, $f_{|E_\lambda^\perp}$ est un endomorphisme de $E_\lambda^\perp$ et on a clairement

$$\left(f_{|E_\lambda^\perp}\right)^*=(f^*)_{|E_\lambda^\perp}$$

5. On montre que $f_{|E_\lambda^\perp}$ est normal. On a

$$\begin{aligned} \left(f_{|E_\lambda^\perp}\right)^*\circ f_{|E_\lambda^\perp} &= (f^*)_{|E_\lambda^\perp}\circ f_{|E_\lambda^\perp} \\ &= f_{|E_\lambda^\perp}\circ(f^*)_{|E_\lambda^\perp} \\ &= f_{|E_\lambda^\perp}\circ\left(f_{|E_\lambda^\perp}\right)^* \end{aligned}$$

   La deuxième égalité vient de la normalité de f.

6. D'après l'hypothèse de récurrence, $f_{|E_\lambda^\perp}$ possède une base propre orthonormée $(e_1,\ldots,e_\ell)$ Soit $(e_{\ell+1},\ldots,e_n)$ une base orthonormée de E_λ. Il est clair alors que $(e_1,\ldots,e_n)$ est une base orthonormée propre de f. □

Remarque 22. La réciproque est clairement vraie : si la matrice de f est diagonale dans une base orthonormée, alors f est normale. On voit maintenant à quoi ressemble un endomorphisme normal.

Corollaire 23.

1. *Toute matrice complexe normale est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ (la matrice diagonale obtenue n'est pas forcément réelle). De plus, ses sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux dans $\mathbb{C}^n$.*

2. *Soit* $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ *une matrice normale. Alors il existe* $P \in U(n, \mathbb{C})$ *tel que* ${}^t\bar{P}AP$ *est diagonale.*

Remarque 24. Nous avons déjà dit que les matrices complexes symétriques ne sont pas normales en général (penser à la matrice C de la démonstration de la proposition 20). Pas étonnant donc qu'elles ne soient pas diagonalisables en général (revoir remarque 18).

Proposition 25. *Les matrices sont considérées ici comme des matrices complexes.*

1. *Les valeurs propre d'une matrice (anti)-symétrique réelle sont réelles.*
2. *Les valeurs propres d'une matrice hermitienne sont réelles.*
3. *Les valeurs propres d'une matrice antihermitienne sont imaginaires pures.*
4. *Les valeurs propres d'une matrice orthogonale ou unitaire sont des nombres de module 1.*

On laisse au lecteur le soin de prouver cette proposition.

7 Conclusion

Pour démontrer qu'un endomorphisme f admet une base propre orthonormée, il faut

- prouver qu'il admet au moins une valeur propre λ (et donc un vecteur propre associé u)
- prouver que la l'orthogonal F de u est stable par f, ce qui réduit le problème à l'étude de la restriction de f à F.

Bibliographie

[1] Richard Gomez. Structure réelle-complexe. *MégaMaths site web*, , 2007. Http://megamaths.perso.neuf.fr/rg.

[2] Joseph Grifone. *Algèbre linéaire, 2ème édition*. Cèpadués edition, 2002.

Texte édité avec TeXmacs
Publié sur Mégamaths, `http://megamaths.perso.neuf.fr`